Espaços associados a matrizes
Álgebra Linear – Videoaula 8

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Vetores "dentro" de matrizes

Tome uma matriz 3×4

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & 9 & 4 & -9 \\ \pi & \sqrt{2} & e^{\pi} - 9 & 0 \end{bmatrix}$$

- As linhas são vetores de $\mathbb{R}^4$.
- As colunas são vetores de $\mathbb{R}^3$.

Nós pensamos nos vetores de $\mathbb{R}^n$ como "tuplas ordenadas de números reais".

Elas podem ser ordenadas

- Da esquerda para a direita;
- Ou de cima para baixo

Formas equivalentes de representar um mesmo vetor:

$$(x_1, x_2, x_3) \cong \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Só não misture formas diferentes!

O **espaço linha** de uma matriz $m \times n$

$$A = [a_{ij}]_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é o subespaço $\text{lin}(A)$ de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A:

$$\text{lin}(A) = \left\langle \left\{ (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \right\} \right\rangle$$

Espaço linha

O **espaço linha** de uma matriz $m \times n$

$$A = [a_{ij}]_{ij} = \begin{bmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ \text{---} & a_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_m & \text{---} \end{bmatrix}$$

é o subespaço $\mathrm{lin}(A)$ de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A:

$$\mathrm{lin}(A) = \left\langle \left\{ a_1, a_2, \ldots, a_m \right\} \right\rangle$$

Espaço coluna

O **espaço coluna** de uma matriz $m \times n$

$$A = [a_{ij}]_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é o subespaço $\mathrm{col}(A)$ de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas de A:

$$\mathrm{col}(A) = \left\langle \left\{ (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \right\} \right\rangle$$

Espaço coluna

Escrevendo vetores como colunas: O **espaço coluna** de A é

$$\mathrm{col}(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

O **espaço coluna** de uma matriz $m \times n$

$$A = [a_{ij}]_{ij} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

é o subespaço $\mathrm{col}(A)$ de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas colunas de A:

$$\mathrm{col}(A) = \left\langle \left\{ c_1, c_2, \ldots, c_n \right\} \right\rangle$$

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix}.$$

Vamos encontrar uma base para $\text{lin}(A)$:

- Adicionamos o primeiro vetor:

$$\{(2, 9, -10, 4)\}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix}.$$

- Tentamos adicionar o segundo vetor:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 6 \\ -10 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OK: $\{(2, 9, -10, 4), (1, 6, 4, 8)\}$.

Espaço linha

Calculando uma base

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix}.$$

- Tentamos adicionar o terceiro vetor:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & -11 \\ -10 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NÃO OK: continua com $\{(2, 9, -10, 4), (1, 6, 4, 8)\}$.

$\{(2, 9, -10, 4), (1, 6, 4, 8)\}$ é base de $\text{lin}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 9 & -10 & 4 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 - 2L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + 2L_1 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + 3L_2 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 - 6L_2 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -32 & -16 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -32 & -16 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Em cada passo aplicamos uma operação elementar nas linhas:
  - Trocar linhas de posição
  - Multiplicar matrizes por números não nulos;
  - Somar linhas a outras.
- Após cada passo, as novas linhas são combinações lineares das antigas
- Mas operações elementares são inversíveis, logo as linhas antigas são combinações lineares das novas.

Espaço linha

Mas e se escalonarmos A?

- O espaço linha da forma escalonada é o mesmo que o da matriz original!
- A forma escalonada tem uma base clara para o espaço linha.

Teorema

Seja A uma matriz $m \times n$ e E uma forma escalonada de A. Então as linhas não-nulas de E formam uma base para $\operatorname{lin}(A)$.

Já sabemos que as linhas não-nulas de E geram $\operatorname{lin}(A)$.
Falta verificar que são LI:

E é escalonada, e então tem a forma

$$E = \begin{bmatrix} \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_3 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

com $\lambda_i \neq 0$.

Se tivermos uma combinação linear nula das linhas:

$$\begin{array}{rl} \alpha_1 & \begin{bmatrix} \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \\ +\alpha_2 & \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \\ +\alpha_3 & \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_3 & \cdots \end{bmatrix} \\ & \vdots \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \star & \cdots & \star & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Então $\alpha_1\lambda_1 = 0$.

Como $\lambda_1 \neq 0$, então $\alpha_1 = 0$.

$$\begin{array}{c c} 0 & \begin{bmatrix} \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \\ +\alpha_2 & \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \\ +\alpha_3 & \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_3 & \cdots \end{bmatrix} \\ & \vdots \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \star & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Então $\alpha_2\lambda_2 = 0$

Como $\lambda_2 \neq 0$, então $\alpha_2 = 0$.

Repetindo este processo, $\alpha_i = 0$ para todo i.

As linhas não-nulas de E são LI, além de serem geradoras, logo uma base para $\mathrm{lin}(A)$.

Espaço linha
Aplicando o teorema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -32 & -16 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\{(1, 0, -32, -16), (0, 1, 6, 4)\}$ é uma base de $\operatorname{lin}(A)$.

E o que escalonar faz nas colunas?

operações elementares nas linhas	$\iff$	multiplicar à esquerda por matrizes inversíveis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 9 & -10 & 4 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 - 2L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 9 & -10 & 4 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 + 2L_1 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Espaço coluna

Achando uma base

$$A \xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 + 3L_2 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -18 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 - 6L_2 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -32 & -16 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então para escalonar uma matriz A, a estamos multiplicando à esquerda por uma matriz J inversível:

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ c_1 & \cdots & c_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$JA = J \begin{bmatrix} | & & | \\ c_1 & \cdots & c_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ Jc_1 & \cdots & Jc_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Teorema

*Sejam A uma matrix $m \times n$ e E uma forma escalonada de A.
Então as colunas de A que correspondem às colunas que contêm os pivôs de E formam uma base para o espaço coluna de A.*

SPG E reduzida.

Temos $E = JA$ para alguma J inversível.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & | & & | & & | & \\ \cdots & e_1 & \cdots & e_2 & \cdots & e_k & \cdots \\ & | & & | & & | & \end{bmatrix}$$

Os vetores nas colunas com pivôs de E são vetores da base canônica de $\mathbb{R}^m$, logo uma base para $\text{col}(E)$.

Como

$$
\begin{aligned}
A &= J^{-1}E \\
&= J^{-1}\begin{bmatrix} \cdots & | & \cdots & | & \cdots & | & \cdots \\ \cdots & e_1 & \cdots & e_2 & \cdots & e_k & \cdots \\ \cdots & | & \cdots & | & \cdots & | & \cdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cdots & | & \cdots & | & \cdots & | & \cdots \\ \cdots & J^{-1}e_1 & \cdots & J^{-1}e_2 & \cdots & J^{-1}e_k & \cdots \\ \cdots & | & \cdots & | & \cdots & | & \cdots \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

as colunas correspondentes de A são $a_i = J^{-1}e_i$, $i = 1, \ldots, k$.

- $\underline{a_1, \ldots, a_k \text{ geram col}(A)}$: Se c é uma coluna de A,então Jc é uma coluna de E.
  Logo
  $$Jc = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i,$$
  pois $\{e_1, \ldots, e_k\}$ gera col(A). Assim,
  $$c = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i J^{-1} e_i = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$
  Portanto, $a_1, \ldots, a_k$ geram col(A).

- $\underline{a_1, \ldots, a_k \text{ são LI}}$: Se $\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i = 0_m$, então

$$\begin{aligned} 0_m = J0_m = J\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i J a_i \\ = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, \end{aligned}$$

  logo $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.
  Portanto, $a_1, \ldots, a_k$ são LI.

Provamos que $a_1, \ldots, a_k$ são LI e geram $\mathrm{col}(A)$, ou seja, são uma base.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -32 & -16 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\{(2, 1, -2), (9, 6, -11)\}$ é uma base de $\text{col}(A)$

(Em formato de "vetor-coluna", $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -11 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para $\text{col}(A)$.)

Espaços nulo e conulo

O **espaço nulo** de uma matriz $m \times n$ A é o espaço solução $\mathrm{nul}(A)$ do sistema

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0_{m\times 1}.$$

O **espaço conulo** de A é o espaço solução $\mathrm{conul}(A)$ do sistema

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{bmatrix} A = 0_{1\times n}.$$

Se $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$,

- $\mathrm{nul}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : A_{m\times n} x_{n\times 1} = 0_{m\times 1}\right\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^{n}$.
- $\mathrm{conul}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^{m}$.
- $$\begin{aligned}\mathrm{conul}(A) &= \left\{x \in \mathbb{R}^{1\times m} : xA = 0_{1\times n}\right\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^{1\times m} : (xA)^T = 0_{1\times n}^T\right\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^{1\times m} : A^T x^T = 0_{n\times 1}\right\}\\ &= \left\{y \in \mathbb{R}^{1\times m} : A^T y = 0_{n\times 1}\right\}\\ &= \mathrm{nul}(A^T)\end{aligned}$$

Para achar uma base:

- Resolva o sistema associado.
- Escreva a solução geral em forma paramétrica.
- Isso se resume a escalonar a matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -32 & -16 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema $Ax = 0$, com $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$, é

$$\begin{cases} x_1 & = & 32x_3 + 16x_4 \\ x_2 & = & -6x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (32x_3 + 16x_4, -6x_3 - 4x_4, x_3, x_4) \\ &= x_3(32, -6, 1, 0) + x_4(16, -4, 0, 1) \end{aligned}$$

Portanto $\{(32, -6, 1, 0), (16, -4, 0, 1)\}$ é base de $\mathrm{nul}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & -11 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

Resolver $xA = 0$ equivale a resolver $A^T y = 0$:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & -11 \\ -10 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema $A^T y = 0$, com $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$, é

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{3} y_3 \\ y_2 = \dfrac{4}{3} y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 & = & \frac{1}{3}y_3 \\ y_2 & = & \frac{4}{3}y_3 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3) &= \left(\frac{1}{3}y_3, \frac{4}{3}y_3, y_3\right) \\ &= y_3\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

Portanto $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)\right\}$ é base de conul(A).